

На правах рукописи

Соловьёв Владимир Игоревич



**СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

Специальность

08.00.13 – «Математические и инструментальные методы экономики»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата экономических наук

Работа выполнена на кафедре прикладной математики Государственного университета управления.

Научный руководитель:

доктор экономических наук,
профессор

В. А. КОЛЕМАЕВ

Официальные оппоненты:

доктор экономических наук,
профессор

В. В. КАПИТОНЕНКО

кандидат экономических наук

С. А. ТРЕЩАЛОВ

Ведущая организация:

Центральный экономико-математический институт РАН

Защита состоится «25» сентября 2001 г. в ___ часов на заседании Диссертационного Совета К 053.21.07 в Государственном университете управления по адресу: 109542, Москва, Рязанский просп., 99, корп. 1, зал заседаний Учёного Совета.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Государственного университета управления.

Автореферат разослан «___» августа 2001 г.

Учёный секретарь

Диссертационного Совета,

кандидат экономических наук,
доцент



Л. Д. АБРАМОВА

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Одним из основных постулатов современной политической экономики и математической экономики является *общая теория экономического равновесия*, основанная на утверждении Ж.-Б. Сэя (XIX в.) о том, что рыночные отношения автоматически приводят к состоянию равновесия, т. е. равновесие является глобально устойчивым. Реальная экономическая система никогда не находится ни в состоянии статического равновесия, ни в состоянии сбалансированного роста, о чём свидетельствуют экономические кризисы, регулярно возникающие в последнее время в различных странах мира.

Как отмечают А. А. Петров, И. Г. Поспелов и А. А. Шананин¹, «*в любой экономической системе у людей достаточно свободы, чтобы действия их всех вместе выглядели хаотическими*». Экономика серьёзно подвержена влиянию случайных факторов — многие события, влияющие на макроэкономическую динамику, являются случайными: экономическая конъюнктура, производственная неопределённость, сбор большого или малого урожая, научные открытия и др. Поэтому стохастические математические модели являются наиболее адекватным отражением экономической реальности.

Любые решения об управлении экономикой страны должны приниматься на основе тщательного анализа имеющейся информации, с учётом оценок возможных последствий и рисков. Даже если модель построена точно, практические предсказания и управление соответствующей экономической системой могут оказаться невозможными, как из-за влияния экзогенных случайных факторов, так и вследствие неустранимых ошибок измерений.

В современной математической экономике распространены следующие типы моделей макроэкономической динамики: детерминированные модели с дискретным временем; детерминированные модели с непрерывным временем; стохастические модели с дискретным временем.

В последнее время при моделировании финансовых процессов появляются и стохастические модели с непрерывным временем, но такие модели практически не применяются при исследовании динамики макроэкономических систем в целом.

Вместе с тем, использование стохастических моделей с непрерывным временем при анализе макроэкономических процессов актуально, так как аналитическое исследование таких моделей технически проще, чем исследование аналогичных систем с дискретным временем (в силу так называемого «*проклятия размерности*», впервые отмеченного Р. Беллманом).

¹ Петров А. А., Поспелов И. Г., Шананин А. А. Опыт математического моделирования экономики. – М.: Энергоатомиздат, 1996. – с. 34.

Диссертация выполнена в рамках плановой госбюджетной научно-исследовательской работы Государственного университета управления по теме «*Математические методы исследования экономики*» [18], [19] (№ гос. регистрации 01.960.010838, код темы по ГРНТИ 06.35.51).

Цель исследования. Целью диссертационного исследования является разработка и анализ макромоделей экономической динамики, учитывающей влияние на эту динамику случайных факторов.

Задачи исследования. Достижение поставленной цели проводится посредством последовательной реализации следующих основных задач:

- анализ и обобщение современных подходов к учёту случайных факторов при анализе макроэкономических процессов;
- выявление макроэкономических показателей, на которые случайные факторы оказывают существенное влияние;
- разработка теоретических подходов к построению математической модели национальной экономики, учитывающей влияние случайных факторов;
- построение односекторной стохастической динамической модели национальной экономики и её исследование;
- проверка по статистическим данным гипотезы о применимости построенной модели к реальной экономической системе (экономике России);
- проведение практических экспериментов с построенной моделью;
- разработка индикатора экономических кризисов.

Объект исследования. Объектом исследования является национальная экономическая система.

Предмет исследования. Предметом исследования выступают социально-экономические процессы, протекающие в национальной экономике.

Методология и методика исследования. Теоретической и методологической основой диссертационной работы послужили исследования в области *математического моделирования макроэкономической динамики, теории случайных процессов и стохастического исчисления, а также теории вероятностей, математической статистики и эконометрики*. В ходе исследования были использованы труды отечественных и зарубежных экономистов и математиков: *В. И. Аркина, Л. Башелье (L. Bachelier), Ф. Блэка (F. Black), Н. Винера (N. Wiener), К. Гардинера (K. Gardiner), А. Диксита (A. Dixit), И. В. Евстигнеева, Ж. Жакода (J. Jacod), В.-Б. Занга (W.-B. Zhang), К. Ито (K. Itô), М. Каца (M. Kaz), В. А. Колемаева, А. Н. Колмогорова, Р. Ш. Липцера, Р. Мертона (R. Merton), А. А. Петрова, Р. Пиндайка (R. Pindyck), И. Г. Поспелова, Э. Л. Пресмана, П. Самуэльсона (P. Samuelson), А. Д. Слостникова, А. Д. Смирнова,*

Р. Солоу (R. Solow), С. Тарновского (S. Turnovsky), А. А. Шананина, А. Н. Ширяева, М. Шоулза (M. Scholes) и других авторов.

Для расчётов были использованы программные средства *Microsoft® Visual C++™* и *Microsoft® Excel™*.

Научная новизна. Автором получены и выносятся на защиту следующие новые научные результаты:

- в основных предположениях модели Солоу построена односекторная стохастическая динамическая модель экономики с непрерывным временем;
- получено точное аналитическое решение этой модели, доказаны теоремы о поведении математических ожиданий и дисперсий макроэкономических показателей национальной экономики, описываемой этой моделью;
- по статистическим данным об экономике Российской Федерации проведена параметрическая идентификация модели, сделаны практические выводы о динамике российской экономики;
- проведён анализ макроэкономических показателей Российской Федерации по методу нормированного размаха (статистический \mathcal{R}/\mathcal{S} -анализ);
- проведён энтропийный анализ макроэкономических показателей Российской Федерации с помощью метода падающих прямоугольников;
- предложен метод прогнозирования валютных кризисов на основе анализа относительного изменения энтропии динамики обменных курсов валют.

Достоверность. Достоверность полученных результатов обеспечивается построением экономически обоснованных математических моделей, использованием для исследования этих моделей достоверных математических методов, совпадением частных случаев с известными результатами. Основные положения работы сформулированы в виде теорем с доказательствами.

В качестве материала, на котором оцениваются реальные параметры экономики Российской Федерации, используются исторические данные Госкомстата России и Центробанка России.

Практическая значимость. Предложенная односекторная стохастическая динамическая модель экономики позволяет получать своевременные качественные и количественные выводы не только об ожидаемых последствиях тех или иных экономических решений, но и о сопутствующих этим решениям рисках.

Анализ относительного изменения энтропии динамики обменных курсов позволяет получить сигнал о грядущем наступлении валютного кризиса заранее, за один или несколько месяцев до его наступления.

Результаты работы могут быть использованы:

- государственными структурами как инструмент поддержки при-

нятия решений при макроэкономическом регулировании с целью оценки возможных последствий и рисков;

- финансовыми институтами как индикатор наступления валютных кризисов с целью своевременного страхования рисков;
- учебными заведениями при обучении, переподготовке и консультировании работников соответствующих государственных регулирующих структур, государственных и коммерческих финансовых институтов.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на: семинарах кафедры прикладной математики ГУУ (Москва, ГУУ, 1997-2000 гг.); семинаре «*Математические методы исследования сложных систем, процессов и структур*» (Москва, МГОПУ, 1999 г.); VI Международной научно-методической конференции «*Современные информационные технологии в профессиональном образовании*» (Москва, МГТА, 2000 г.); 15-й Всероссийской научной конференции молодых учёных и студентов «*Реформы в России и проблемы управления-2000*» (Москва, ГУУ, 2000 г.); научной конференции «*Математические методы исследования экономики*» кафедры прикладной математики ГУУ (Москва, ГУУ, 2000 г.); VII Всероссийской школе-коллоквиуме по стохастическим методам (Сочи, МИ РАН им. В.А. Стеклова, РостГСУ, Ростовское математическое общество, Редакция журнала «ТВИП», СочГУТКД, 2000 г.); Первом Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Сочи, Редакция журнала «Обозрение прикладной и промышленной математики», РостГСУ, Ростовское математическое общество, СамГУ, СочГУТКД, 2000 г.); Международной научной конференции «*Актуальные проблемы управления-2000*» (Москва, ГУУ, ОЭ РАН, Мэрия Москвы, 2000 г.); Российском научном симпозиуме «*Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических процессов*» (Нарофоминск, ГУУ, ЦЭМИ РАН, РФФИ, РАЕН, 2000 г.); Международной научной конференции по фундаментальным наукам «*Ломоносов-2001*» (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2001 г.); Втором Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Самара, СамГУ, Редакция журнала «Обозрение прикладной и промышленной математики», РостГЭА, 2001 г.).

Внедрение результатов исследования. Результаты исследования нашли отражение в практической деятельности Службы информатизации ВГТРК по определению объёмов государственной поддержки радио- и телевизионных передающих центров (акт о внедрении от 18.01.2001 г.).

Материалы исследования были использованы в научно-исследовательской работе ГУУ по теме «*Математические методы исследования экономики*» [18]-[19] (№ гос. регистрации 01.960.010838, код те-

мы по ГРНТИ 06.35.51). В развитие идей, изложенных в третьей главе диссертации, студентом Е. С. Долматовым под руководством соискателя была выполнена работа, занявшая третье место на конкурсе студенческих научных работ ГУУ в 2000 г. Ряд подходов, разработанных в диссертационном исследовании, составил методологическую основу специализированных направлений учебного процесса в Институте информационных систем управления ГУУ. Эти подходы используются при преподавании дисциплины *«Теория вероятностей и математическая статистика»* студентам специальности *«Математические методы в экономике»* - 061800, а также в деятельности Студенческого научного кружка *«Стохастические модели в математической экономике и финансовой математике»*, работающего при кафедре прикладной математики ГУУ. По материалам исследования опубликованы учебное пособие [1] и проблемная лекция [2] для студентов специальности *«Математические методы в экономике»* - 061800 (акт о внедрении от 08.06.2001 г.).

Публикации. Основным материалом диссертационной работы опубликован в 17 печатных научных работах общим объёмом 224 с. (авторский объём 219 с.) [1]-[17] и двух рукописных научных отчётах [1818]-[19]. Из совместных публикаций в диссертацию включён лишь тот материал, который непосредственно принадлежит соискателю.

Структура и объём работы. Работа состоит из *введения, трёх глав, выводов, списка использованной литературы и приложений*, содержит 138 страниц сквозной нумерации, в том числе 7 иллюстраций и 2 таблицы; список использованной литературы включает 125 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, формулируются цель и задачи диссертационной работы, объект и предмет исследования, обсуждаются методология и методика исследования, научная новизна, достоверность, практическая значимость, апробация и внедрение полученных результатов, приводятся сведения о публикациях, структуре и объёме работы.

В первой главе проведён обзор работ, посвящённых стохастическому моделированию национальной экономики. Исследование результатов, полученных в области стохастического моделирования экономических процессов, показало, что [3]:

1. Процессы, происходящие в макроэкономике, серьёзно подвержены влиянию случайным факторов. Поэтому важно рассчитывать не только ожидаемые (прогнозные) значения экономических показателей — математические ожидания, но и погрешности этих прогнозов — дисперсии.

2. Существующие теоретические подходы к построению математических моделей макроэкономических процессов с учётом фактора неопределённости можно условно разделить на несколько взаимно дополняющих направлений. Первое из них видит важнейший источник неопределённости макроэкономической динамики в принципиальной нелинейности макроэкономических процессов. Второе направление основано на стохастических обобщениях дискретных экономических моделей. Третье направление состоит в стохастическом анализе непрерывных моделей процессов, происходящих в кредитно-финансовой подсистеме экономики. Четвертое направление основано на термодинамических аналогиях.

3. Среди широкого спектра исследований макроэкономической динамики, отсутствуют работы, в которых для моделирования развития национальной экономики использовались бы стохастические модели с непрерывным временем. Эти модели, во-первых, учитывают влияние случайных факторов на экономическую динамику, а во-вторых — поддаются более лёгкому аналитическому и численному исследованию, чем распространённые стохастические модели с дискретным временем. По сравнению с нелинейными детерминированными моделями стохастические модели с непрерывным временем позволяют оценивать не только ожидаемые значения экономических показателей, но и возможные риски. По сравнению с термодинамическими аналогиями, стохастические экономико-математические модели с непрерывным временем позволяют делать более прозрачные качественные выводы, поскольку основываются на содержательных экономических постановках.

4. Таким образом, представляется актуальным построение стохастических аналогов детерминированных экономико-математических моделей с непрерывным временем с целью получения не только оценок прогнозируемых значений экономических показателей, но и сопутствующих рисков.

Во второй главе рассматривается следующее стохастическое обобщение модели Солоу. В замкнутой односекторной экономической системе производится один универсальный продукт, который может как потребляться, так и инвестироваться. Считаются выполненными основные предположения модели Солоу (постоянство темпа прироста числа занятых, износа основных производственных фондов и нормы накопления, отсутствие лага капиталовложений).

Состояние экономики в момент времени t определяется следующими показателями: *валовым внутренним продуктом (ВВП) X_t , основными производственными фондами K_t , числом занятых в производственной сфере L_t , инвестициями I_t и фондом непродовственного потребления C_t .*

Пусть *годовой темп прироста числа занятых* составляет ν , тогда для L_t можно записать дифференциальное уравнение $\frac{dL_t}{dt} = \nu L_t$, решением которого является функция $L_t = L_0 e^{\nu t}$, где L_0 — число занятых в начальный момент времени.

Как отмечают исследователи в области математической демографии и математической экологии, при большой численности населения случайные факторы практически не влияют на её динамику, поэтому и мы не будем их учитывать.

Пусть задано *вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, где Ω — пространство элементарных событий, \mathcal{F} — σ -алгебра событий, \mathbf{P} — вероятностная мера, и *фильтрация* $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, удовлетворяющая обычным условиям, определяет на этом вероятностном пространстве *стохастический базис* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$. При этом σ -алгебра \mathcal{F}_t имеет смысл всей информации, доступной к моменту t ($t \geq 0$).

Пусть за год *выбывает* доля μ основных производственных фондов, *норма накопления* составляет ρ , а *годовой ВВП* определяется *линейно-однородной неоклассической производственной функцией* $X = F(K, L)$. Тогда *износ* и *инвестиции* в расчёте на год равны μK_t и $I_t = \rho X_t = \rho F(K_t, L_t)$ соответственно, лаг капиталовложений отсутствует, значит, *прирост фондов* составляет $dK_t = -\mu K_t dt + I_t dt$ или $dK_t = [-\mu K_t + \rho F(K_t, L_t)] dt$.

Перепишем последнее уравнение в виде

$$\frac{dK_t}{K_t} = \left[-\mu + \rho F\left(1, \frac{L_t}{K_t}\right) \right] dt, \quad (1)$$

где мы учли, что $F(K_t, L_t) = K_t F\left(1, \frac{L_t}{K_t}\right)$, поскольку производственная функция $F(K_t, L_t)$ является линейно-однородной.

В отличие от динамики числа занятых, динамика фондов может существенно зависеть от случайных факторов, которые мы учтём, добавив в уравнение (1) стохастическое слагаемое σdW_t :

$$\frac{dK_t}{K_t} = \left[-\mu + \rho F\left(1, \frac{L_t}{K_t}\right) \right] dt + \sigma dW_t. \quad (2)$$

Здесь $(W_t)_{t \geq 0}$ — *стандартное броуновское движение*, заданное на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$, а σ представляет собой *коэффициент изменчивости прироста фондов*.

Стохастическое слагаемое σdW_t в (2) характеризует влияние экзогенных случайных факторов (экономической конъюнктуры, производственной неопределённости, научных открытий и др.) на макроэкономическую динамику.

При переходе в (2) к относительным показателям, *фондовооружённости* $k_t = \frac{K_t}{L_t}$, *народнохозяйственной производительности труда* $x_t = \frac{X_t}{L_t}$, *удельным инвестициям* на одного занятого $i_t = \frac{I_t}{L_t}$ и *среднедушевому потреблению* $c_t = \frac{C_t}{L_t}$, можно записать, пользуясь формулой Ито, стохастическое дифференциальное уравнение для фондовооружённости

$$dk_t = \left[-(\mu + \nu)k_t + \rho k_t F\left(1, \frac{1}{k_t}\right) \right] dt + \sigma k_t dW_t$$

или, поскольку производственная функция $F(K_t, L_t)$ является линейно-однородной, а значит, $k_t F\left(1, \frac{1}{k_t}\right) = F(k_t, 1)$,

$$dk_t = [-(\mu + \nu)k_t + \rho F(k_t, 1)]dt + \sigma k_t dW_t.$$

Введя обозначения $\lambda = \mu + \nu$, $f(k_t) = F(k_t, 1)$, получаем окончательно *односекторную стохастическую динамическую модель экономики* [1], [2], [4]:

$$\begin{cases} dk_t = [-\lambda k_t + \rho f(k_t)]dt + \sigma k_t dW_t, \\ k_0 = \frac{K_0}{L_0}, \quad \lambda = \mu + \nu, \\ x_t = f(k_t), \quad i_t = \rho f(k_t), \quad c_t = (1 - \rho)f(k_t). \end{cases} \quad (3)$$

*Модель Солоу*²

$$\begin{cases} dk_t = [-\lambda k_t + \rho f(k_t)]dt, \\ k_0 = \frac{K_0}{L_0}, \quad \lambda = \mu + \nu, \\ x_t = f(k_t), \quad i_t = \rho f(k_t), \quad c_t = (1 - \rho)f(k_t) \end{cases} \quad (4)$$

описывает изменение экономических показателей при отсутствии влияния случайных факторов (или без их учёта).

В работе [4] исследован случай, когда в качестве производственной

² Солоу Р. (Solow R. M.) Contribution to the Theory of Economic Growth // Quarterly Journal of Economics. – 1956. – V. 70. – P. 65-94.

функции выступает функция Кобба-Дугласа $F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$. При этом

$$f(k) = Ak^\alpha,$$

и модель (3) принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} dk_t = (-\lambda k_t + \rho Ak_t^\alpha)dt + \sigma k_t dW_t, \\ k_0 = \frac{K_0}{L_0}, \quad \lambda = \mu + \nu, \\ x_t = Ak_t^\alpha, \quad i_t = \rho Ak_t^\alpha, \quad c_t = (1 - \rho)Ak_t^\alpha. \end{array} \right. \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 2.2.1. *Единственным (с точностью до стохастической неразличимости) решением задачи (5) является набор функций*

$$k_t = \left\{ S_t \left[k_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)\rho A \int_0^t \frac{d\tau}{S_\tau} \right] \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

$$x_t = Ak_t^\alpha, \quad i_t = \rho Ak_t^\alpha, \quad c_t = (1 - \rho)Ak_t^\alpha,$$

где $S_t = e^{-(1-\alpha)(\lambda+0,5\sigma+0,5\alpha\sigma^2)t-(1-\alpha)\sigma W_t}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.1. Будем говорить, что экономика находится на *логарифмически стационарной траектории*, если математические ожидания логарифмов фондовооружённости, народнохозяйственной производительности труда, удельных инвестиций и среднедушевого потребления не изменяются во времени.

ТЕОРЕМА 2.3.1. *В экономике, описываемой моделью (5), на логарифмически стационарной траектории фондовооружённость, народнохозяйственная производительность труда, удельные инвестиции и среднедушевое потребление подчиняются следующим формулам:*

$$k^0 = \left(\frac{\rho A}{\lambda + \sigma^2 / 2} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad x^0 = A \left(\frac{\rho A}{\lambda + \sigma^2 / 2} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

$$i^0 = \rho A \left(\frac{\rho A}{\lambda + \sigma^2 / 2} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad c^0 = (1 - \rho)A \left(\frac{\rho A}{\lambda + \sigma^2 / 2} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Видно, что поскольку $\frac{\sigma^2}{2} > 0$, $\frac{1}{1-\alpha} > 1$, значение фондовооружённости (16) на логарифмически стационарной траектории увеличивается по

сравнению с детерминированным случаем $k_{\text{детерм}}^0 = \left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ при $\rho A > \lambda$ и уменьшается при $\rho A < \lambda$.

В практических целях важнейшими характеристиками экономических показателей, описываемых моделью (5), являются их *математические ожидания*, характеризующие ожидаемые значения, и *дисперсии*, характеризующие меру разброса реальных значений вокруг математических ожиданий.

Теоремы 2.4.1 и 2.4.2 [1]-[2], [5]-[7], [13] дают оценки соответственно математических ожиданий и дисперсий показателей развития экономики, описываемой моделью (5).

ТЕОРЕМА 2.4.1 *При любой эластичности выпуска по фондам $\alpha \in [0;1]$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{M}k_t \geq \left[\frac{\rho A}{\lambda + 0,5\alpha\sigma^2} + \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{\rho A}{\lambda + 0,5\alpha\sigma^2} \right) e^{-(1-\alpha)(\lambda + 0,5\alpha\sigma^2)t} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (6)$$

для математического ожидания фондовооруженности.

При любой эластичности выпуска по фондам $\alpha \in [0;0,5]$ справедливы неравенства

$$\mathbf{M}x_t \leq A \left[\frac{\rho A}{\lambda + 0,5\alpha\sigma^2} + \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{\rho A}{\lambda + 0,5\alpha\sigma^2} \right) e^{-(1-\alpha)(\lambda + 0,5\alpha\sigma^2)t} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad (7)$$

$$\mathbf{M}i_t \leq \rho A \left[\frac{\rho A}{\lambda + 0,5\alpha\sigma^2} + \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{\rho A}{\lambda + 0,5\alpha\sigma^2} \right) e^{-(1-\alpha)(\lambda + 0,5\alpha\sigma^2)t} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad (8)$$

$$\mathbf{M}c_t \leq (1 - \rho)A \left[\frac{\rho A}{\lambda + 0,5\alpha\sigma^2} + \left(k_0^{1-\alpha} - \frac{\rho A}{\lambda + 0,5\alpha\sigma^2} \right) e^{-(1-\alpha)(\lambda + 0,5\alpha\sigma^2)t} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad (9)$$

для математических ожиданий народнохозяйственной производительности труда, удельных инвестиций и среднедушевого потребления, а при любом значении $\alpha \in [0,5;1]$ знаки в неравенствах (7)-(9) изменяются на противоположные.

ТЕОРЕМА 2.4.2. *При любых допустимых значениях параметров модели (5) дисперсии фондовооруженности, народнохозяйственной производительности труда, удельных инвестиций и среднедушевого потребления остаются положительными при $t \rightarrow \infty$.*

Теорема 2.4.2 означает, что при управлении экономикой как одним сектором невозможно избавиться от неопределенности, риска, поскольку в любых условиях дисперсии народнохозяйственной производительности

сти труда, удельных инвестиций и среднедушевого потребления остаются положительными при $t \rightarrow +\infty$.

В третьей главе проводится статистический \mathcal{R}/\mathcal{S} -анализ и энтропийный анализ макроэкономических показателей Российской Федерации и параметрическая идентификация односекторной стохастической динамической модели экономики РФ, предложенной во второй главе.

По статистическим данным Госкомстата России о динамике ВВП за 1962-1990 гг. были рассчитаны статистики $\frac{\mathcal{R}_n}{\mathcal{S}_n}$ и получена оценка показателя Харста для ВВП России $\mathbb{H} = 0,513 \approx \frac{1}{2}$ [14], [15]. Это подтверждает гипотезу о том, что влияние экзогенных случайных факторов на экономическую динамику можно моделировать случайным процессом броуновского движения.

Для сравнения, показатель Харста, рассчитанный по данным Центробанка России о динамике обменного курса RUR/USD за 1995-2000 гг., оказался равным $\mathbb{H} = 0,671 > \frac{1}{2}$, что говорит о фрактальной структуре обменного курса, т. е. о том, что разброс его значений оказывается существенно бóльшим, чем разброс реализации случайного процесса броуновского движения, откуда следует увеличение риска валютных операций с увеличением их срока по сравнению с операциями на рынке акций и облигаций.

Для таких процессов предлагается применять энтропийный анализ для исследования степени их неопределённости. В работе проводится энтропийный анализ валютных курсов с целью предсказания валютных кризисов.

В последние годы появилось много работ, предлагающих различные индикаторы надвигающихся валютных кризисов. Эти индикаторы основаны на определённых моделях валютного рынка, в силу чего не всегда адекватно отражают действительность, так как предположения, лежащие в основе соответствующих моделей, не всегда выполнены. Кроме того, расчёты этих индикаторов, как правило, весьма сложны. Простым и адекватным индикатором кризисных явлений на валютном рынке представляется *относительное изменение энтропии динамики обменных курсов валют* как меры неопределённости этой динамики.

Очевидно, кризисы на валютных рынках возникают при возрастании неопределённости ситуации, т. е. при возрастании энтропии. Поэтому в качестве *индикатора возникновения кризиса* была выбрана статистика

$$V_t = \left| \frac{H_t - H_{t-1}}{H_{t-1}} \right|,$$

где H_t — оценка энтропии динамики обменного курса S_t , полученная по методу падающих прямоугольников, реализованному программно [8], [9], [10], [12], [16], [17].

Эта статистика V_t имеет смысл относительного изменения неопределённости ситуации на валютном рынке.

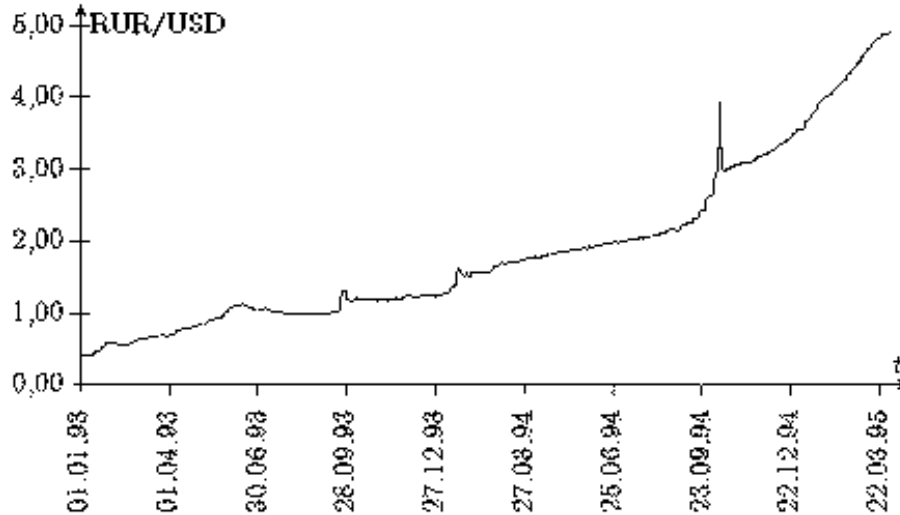


Рис. 1. Динамика обменного курса *RUR/USD* в период с 01.01.1993 по 31.03.1995 (11.10.1994 — кризис «чёрного вторника»)

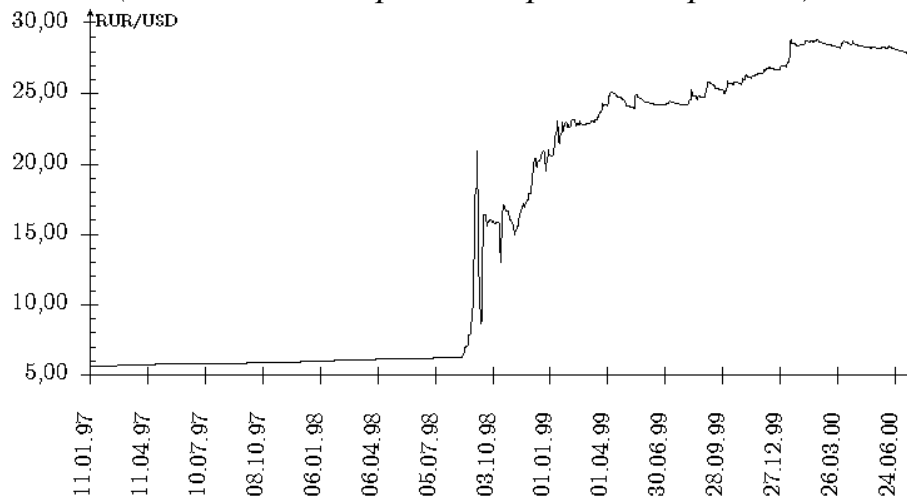


Рис. 2. Динамика обменного курса *RUR/USD* в период с 01.01.1997 по 31.08.2000 (17.08.1998 — кризис на рынке ГКО)

По данным Центробанка России о динамике обменного курса *RUR/USD* за 1995-2000 гг. рассчитывались значения статистики V_t . Было проанализировано поведение этой статистики в спокойные периоды и вблизи кризисов 11.10.1994 г. («чёрный вторник») и 17.08.1998 г. (кризис на рынке ГКО).

На рис. 1, 2 представлены графики изменения курса *RUR/USD* от времени в 1993-1995 и в 1997-2000 гг. соответственно (по данным Центробанка России). В качестве единицы измерения используется один де-

номинированный рубль РФ.

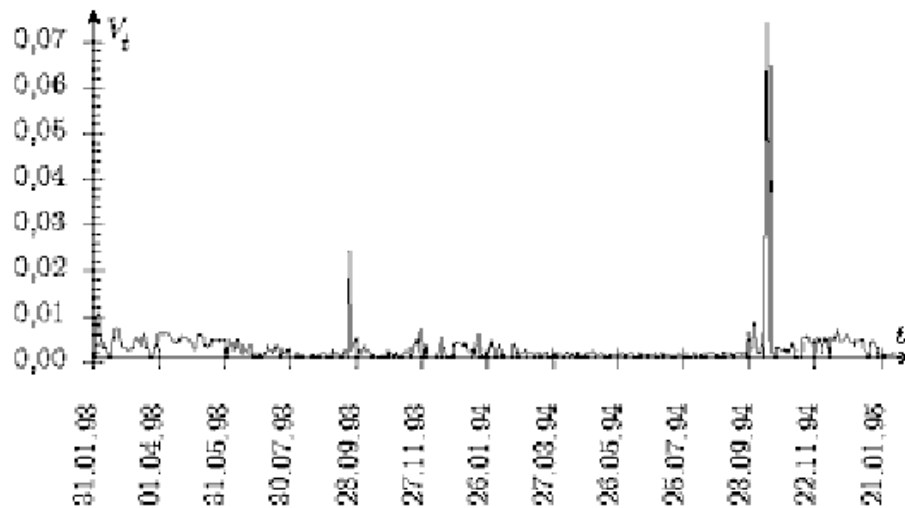


Рис. 3. Изменение статистики V_t
в период с 01.01.1993 по 31.03.1995
(11.10.1994 — кризис «чёрного вторника»)

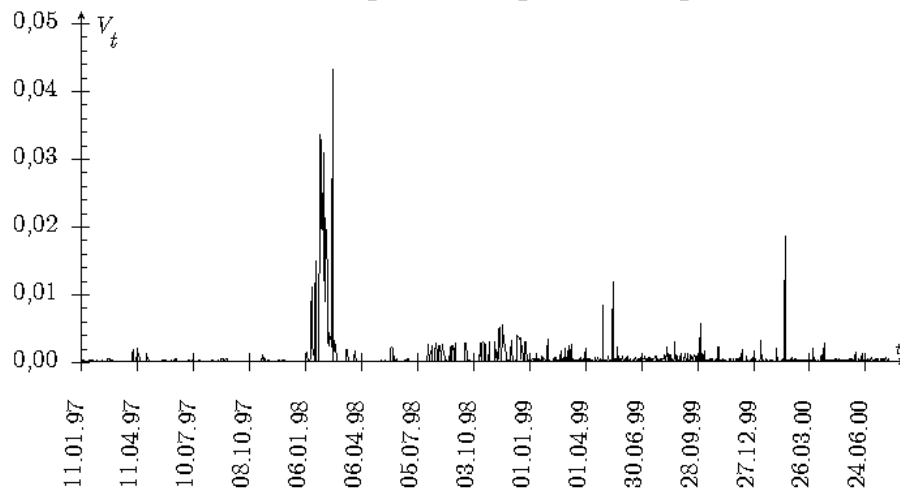


Рис. 4. Изменение статистики V_t
в период с 01.01.1997 по 31.08.2000
(17.08.1998 — кризис на рынке ГКО)

В периоды стабильности V_t была много меньше 0,01. За некоторое время (за месяц или несколько месяцев) до наступления кризисов значение V_t увеличивалось до 0,05-0,07. Детали поведения статистики V_t в периоды, соответствующие рис. 1 и 2, приведены на рис. 3 и 4 соответственно.

Видно, что до наступления кризисов происходят резкие скачки V_t , являясь сигналом для государства (принять меры по предотвращению последствий кризиса) и инвесторов (хеджировать валютные позиции):

- около 22.09.1994 г. — сигнал о наступлении кризиса 10.10.1994 г.;

- февраль 1998 г. — сигнал о грядущем кризисе 17.08.1998 г.

Динамика статистики V_t с 17.08.1998 г. по настоящее время гово-

рит о том, что степень неопределённости ситуации на валютном рынке РФ остаётся высокой, и в ближайшее время возможны резкие скачки обменного курса RUR/USD, хотя и не настолько большие, чтобы называть моменты этих скачков кризисами.

Таким образом, появляется возможность предсказывать нестабильные ситуации на валютных рынках заблаговременно с целью принятия решений по предотвращению последствий кризисов. Предсказание кризисов на валютных рынках является одной из важнейших задач как с точки зрения государства, заинтересованного в прямом регулировании валютного рынка страны, так и с точки зрения инвесторов, заинтересованных в своевременном страховании валютных рисков.

Анализ темпа прироста энтропии для предсказания кризисных ситуаций на финансовых рынках более удобен по сравнению с другими методами, поскольку предложенный алгоритм предсказания кризисов основывается только на официально публикуемых значениях обменных курсов валют. Практическое применение энтропийного анализа для предсказания кризисных ситуаций на финансовых рынках демонстрирует хорошее соответствие теоретических расчётов и практики.

По статистическим данным о показателях развития экономики Российской Федерации за 1962-1990 гг. была проведена параметрическая идентификация модели (3).

Оценка всех параметров проводилась стандартными эконометрическими методами.

Получены следующие оценки коэффициентов модели (3): $\hat{\mu} = 0,05$, $\hat{\nu} = 0,02$, $\hat{\lambda} = 0,07$, $\hat{\rho} = 0,18$, $\hat{A} = 5,39$, $\hat{\alpha} = 0,48$, $\hat{\sigma} = 0,07$, $\hat{k}_0 = 3,04$.

Для экономики России $\hat{\alpha} + \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\sigma}^2} = 14,77 \gg 0,5$, значит, по теоремам 2.4.1 и 2.4.2,

$$Mx_t \leq 5,39 \left(13,63 + 1,78e^{-0,04t} \right)^{0,92}$$

при конечной дисперсии Dx_t .

Функция в правой части последнего неравенства асимптотически убывает со временем, что свидетельствует о том, что в среднем наблюдается замедляющееся падение ВВП России за счёт «проедания» фондов к некоторому стационарному состоянию при конечной дисперсии.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

1. В настоящей работе критически осмыслен опыт существующих теоретических подходов к построению математических моделей макроэкономических процессов с учётом случайных факторов, и в основных предположениях модели Солоу построено её стохастическое обобщение, правомерность использования которого при моделировании национальной экономики Российской Федерации подтверждается анализом показателей развития российской экономики по методу нормированного размаха.

2. В случае производственной функции Кобба-Дугласа получено точное аналитическое решение односекторной стохастической динамической модели экономики и исследованы детерминированные характеристики показателей развития макроэкономической системы, описываемой моделью. Показано, что при управлении экономикой как одним сектором невозможно избавиться от неопределённости, риска.

3. Исследование динамики обменного курса RUR/USD, проведённое методом нормированного размаха по данным Центробанка России о динамике курса за 1995-2000 гг., выявило его сложную фрактальную структуру, что говорит об увеличении риска валютных операций с увеличением их срока по сравнению с операциями на рынках акций и облигаций.

4. Программно реализован метод падающих прямоугольников для вычисления статистической энтропии по данным о реализациях временных рядов.

5. Предложено использовать относительное изменение энтропии обменного курса (рассчитанной по методу падающих прямоугольников) в качестве индикатора валютных кризисов. Практическая проверка такого индикатора произведена на примере кризиса 11.10.1994 г. (мог быть предсказан примерно за 20 дней до его наступления) и кризиса 17.08.1998 г. (мог быть предсказан примерно за 6 месяцев до его наступления). Расчёт энтропии проводился по методу падающих прямоугольников.

6. На основе анализа односекторной стохастической динамической модели экономики с учетом полученных по статистическим данным оценок её коэффициентов сделан вывод о том, что в среднем наблюдается замедляющееся падение ВВП России за счёт «проедания» фондов при конечной дисперсии.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Соловьёв В.И.* Стохастические модели математической экономики и финансовой математики: Учебное пособие. – М.: ГУУ, 2001. – 92 с.
2. *Соловьёв В.И.* Стохастические методы в экономике и финансах: Проблемная лекция. – М.: ГУУ, 2000. – 52 с.
3. *Соловьёв В.И.* Современные подходы к учёту случайности, неопределённости и риска при анализе макроэкономических процессов // Вестник Университета, серия Информационные системы управления / ГУУ. – 2001. – № 1. – С. 226-244.
4. *Соловьёв В.И.* Односекторная стохастическая динамическая модель экономики // Математические методы исследования сложных систем, процессов и структур: Сборник научных трудов – Вып. 3. – М.: Издательство МГОПУ, 2000. – С. 101-112.
5. *Соловьёв В.И.* Неопределённость состояния экономики страны при управлении ею как одним сектором // Вестник Университета, серия Информационные системы управления / ГУУ. – 2000. – № 1. – С. 98-104.
6. *Соловьёв В.И.* Стохастическая модель национальной экономики // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2000. – Т. 7. – № 2. – С. 529-530.
7. *Соловьёв В.И. (Soloviev V.I.)* Macroeconomic Dynamics: Stochastic Approach // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2001. – Т. 8. – № 1. – С. 529-530.
8. *Соловьёв В.И., Соловьёв И.А., Сагомонов Д.С.* Прогнозирование кризисов на финансовых рынках с помощью вычисления информационной энтропии по методу падающих прямоугольников // Экономика. Управление. Культура: Сборник научных работ. – Вып. 7. – М: Издательский центр научных и учебных программ, 2000. – С. 89-95.
9. *Соловьёв В.И.* Вычисление энтропии динамики обменных курсов по статистическим данным // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2000. – Т. 7. – № 2. – С. 421-422.
10. *Соловьёв В.И., Долматов Е.С.* Энтропия как индикатор кризисных явлений на валютных рынках // Вестник Университета, серия Информационные системы управления / ГУУ. – 2001. – № 1. – С. 245-250.
11. *Соловьёв В.И.* Вероятностный анализ показателей развития экономики России на основе её односекторной стохастической динамической модели // Актуальные проблемы управления-2000: Материалы Международной научно-практической конференции. – Вып. 5. – М.: ГУУ, 2000. – С. 165-168.
12. *Соловьёв В.И., Долматов Е.С.* Прогнозирование кризисов на валютных рынках с помощью расчёта информационной энтропии по методу падающих прямоугольников // Актуальные проблемы управления-

2000: Материалы Международной научно-практической конференции. – Вып. 5. – М.: ГУУ, 2000. – С. 162-165.

13. *Соловьёв В.И.* Единство и различия детерминированных и стохастических динамических моделей в преподавании теории вероятностей // Современные информационные технологии в профессиональном образовании: Материалы VI Международной научно-методической конференции. – Вып. 4. – М.: МГТА, 2000. – С. 176-180.

14. *Соловьёв В.И.* О неопределённости динамики макроэкономических показателей // Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических процессов. Материалы Российского научного симпозиума. Нарофоминск, 11-16 декабря 2000 г. – М.: ГУУ, 2000. – С. 210-211.

15. *Соловьёв В.И.* Статистический *R/S*-анализ макроэкономических показателей Российской Федерации // Ломоносов-2001. Международная конференция по фундаментальным наукам, МГУ им. М.В. Ломоносова, 9-14 апреля 2001 г.: Сборник тезисов. – М.: МАКС Пресс, 2001. – С. 81-83.

16. *Соловьёв В.И., Долматов Е.С.* Энтропийный анализ макроэкономических показателей России // Ломоносов-2001. Международная конференция по фундаментальным наукам, МГУ им. М.В. Ломоносова, 9-14 апреля 2001 г.: Сборник тезисов. – М.: МАКС Пресс, 2001. – С. 83-85.

17. *Соловьёв В.И.* Стохастический характер динамики экономических показателей на примере обменных курсов валют // Реформы в России и проблемы управления-2000: Материалы 15-й Всероссийской научной конференции молодых учёных и студентов. – Вып. 1. – М.: ГУУ, 2000. – С. 418-420.

18. Математические методы исследования экономики. Научный отчёт. Этап 4. Алгоритмы решения задач экономико-математическими методами / ГУУ; Научн. рук. В.А. Колемаев; отв. исп. В.М. Громенко; Исп. В.Н. Калинина, В.И. Соловьёв и др.; № гос. регистрации 01.960.010838; код темы по ГРНТИ 06.35.51. – М., 1999.

19. Математические методы исследования экономики. Научный отчёт. Этап 5. Моделирование управленческих решений в экономике / ГУУ; Научн. рук. В.А. Колемаев; отв. исп. В.И. Соловьёв; Исп. В.Н. Калинина, В.И. Малыхин и др.; № гос. регистрации 01.960.010838; код темы по ГРНТИ 06.35.51. – М., 2000.