

На правах рукописи

**Марина Васильевна САМОЯВЧЕВА**

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ  
ОТНОШЕНИЯ ИНВЕСТОРА К РИСКУ  
НА ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ  
ОПЦИОННОГО ХЕДЖИРОВАНИЯ**

08.00.13 — «Математические и инструментальные методы экономики»

**АВТОРЕФЕРАТ**  
**диссертации на соискание ученой степени**  
**кандидата экономических наук**

Москва — 2007

Работа выполнена на кафедре прикладной математики Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Государственный университет управления» и кафедре математики и естествознания Негосударственного образовательного учреждения «Институт гуманитарного образования».

**Научный руководитель:**

кандидат экономических наук, доцент

**В. И. СОЛОВЬЕВ**

**Официальные оппоненты:**

доктор экономических наук, доцент

**С. Г. БЫЧКОВА**

кандидат технических наук, доцент

**Б. И. СКОРОДУМОВ**

**Ведущая организация:**

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «**Московский государственный университет экономики, статистики и информатики**»

Защита состоится 13 ноября 2007 г. в 14 часов на заседании Диссертационного совета К 212.049.01 в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Государственный университет управления» по адресу: 109542, г. Москва, ул. Рязанский просп., д. 99, корп. 1, зал заседаний Ученого Совета.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГОУ ВПО «ГУУ».

Автореферат разослан «    » октября 2007 г.

**Ученый секретарь**

**Диссертационного Совета К 212.049.01,**  
доктор экономических наук, профессор

**Л. Д. АБРАМОВА**

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования.** Фондовый рынок является основным инструментом организации потоков инвестиционного капитала. Особое значение на фондовом рынке имеет сектор производных финансовых инструментов (ПФИ).

В развитых странах оборот этого сектора превышает объем торгов на рынках базовых активов. Положения по ПФИ составляют значительную часть инвестиционных портфелей как профессиональных управляющих активами, так и частных инвесторов. Связано это с тем, что использование ПФИ предоставляет инвесторам широкие возможности по управлению портфелями при минимальных затратах (в частности, на рынке ПФИ спекулятивные операции характеризуются наибольшим эффектом финансового рычага). Важная особенность рынка ПФИ состоит в том, что этот рынок дает несклонным к риску инвесторам возможность хеджировать свои портфели.

Благодаря перераспределению рисков между различными категориями участников развитие торговли ПФИ способствует снижению общего системного риска на фондовом рынке.

В настоящее время благодаря усилиям двух ведущих российских торговых площадок — Фондовой биржи «Российская Торговая Система» (ФБ «РТС») и Фондовой биржи «Санкт-Петербург», организовавших в сентябре 2001 г. на ФБ «РТС» торговую площадку *FORTS* по торговле фьючерсными и опционными контрактами (*FORTS — Futures and Options on RTS*), в России существует ликвидный и динамично развивающийся рынок ПФИ.

Одной из ключевых задач, которую ставит перед собой ФБ «РТС», является разработка и внедрение широкого спектра финансовых инструментов, позволяющих управлять ценовыми рисками.

Динамичное развитие рынка ПФИ определяет необходимость совершенствования стратегий хеджирования, основанных на использовании ПФИ. Особый интерес при этом вызывает исследование влияния отношения инвестора к риску на принятие решений по управлению портфелем, включающим ПФИ. Этой проблематике и посвящена работа.

**Цель исследования.** Целью исследования является модификация классических моделей опционного хеджирования с учетом отношения инвестора к риску.

**Задачи исследования.** Достижение поставленной цели проводилось посредством последовательной реализации следующих основных задач:

- анализ и систематизация известных моделей ценообразования ПФИ с последующим исследованием возможности использования аппарата теории полезности для поддержки процесса принятия решений по управлению портфелями, включающими ПФИ;

- разработка моделей опционного хеджирования в дискретном и непрерывном времени, оптимального в смысле максимизации математического ожидания полезности конечного капитала;
- анализ особенностей российского рынка ПФИ и модификация известных моделей ценообразования ПФИ с учетом этих особенностей;
- сравнение результатов опционного хеджирования с использованием моделей, не учитывающих отношение инвестора к риску, и моделей, учитывающих отношение к риску, на основании реальных данных о торгах ПФИ на ФБ «РТС».

**Область исследования.** Исследование проведено в соответствии с п. 1.6. «Математический анализ и моделирование процессов в финансовом секторе экономики, развитие метода финансовой математики и актуарных расчетов» Паспорта специальности 08.00.13 — «Математические и инструментальные методы экономики» (экономические науки).

**Объект исследования.** Объектом исследования является фондовый рынок.

**Предмет исследования.** Предметом исследования выступает процесс принятия решений по управлению портфелем, содержащим ПФИ.

**Степень научной разработанности проблемы.** Проблематика управления портфелем, включающим ПФИ, восходит к основателю стохастической финансовой математики *Л. Башелье (L. Bachelier)*, который, в частности, в 1900 г. предложил первую модель определения цены опциона. Далее эта проблематика рассматривалась в трудах *Ф. Блэка (F. Black)*, *М. Шоулза (M. Scholes)* и *Р. Мертона (R. C. Merton)*, которые в 1973 г. построили наиболее распространенную на сегодняшний день модель ценообразования опционов в непрерывном времени, *Дж. Кокса (J. C. Cox)*, *Р. Росса (R. A. Ross)* и *М. Рубинштейна (M. Rubinstein)*, предложивших в 1977 г. модель ценообразования опционов в дискретном времени, а также в работах *С. Н. Волкова*, *А. В. Мельникова*, *М. Л. Нечаева*, *В. Н. Тутубалина*, *А. Н. Ширяева* и других авторов.

Понятие полезности было впервые введено *Д. Бернулли (D. Bernoulli)* в 1753 г. при анализе Санкт-Петербургского парадокса. В 1947 г. *Дж. фон Нейман (J. von Neumann)* и *О. Morgenштерн (O. Morgenstern)* довели исследования в области полезности до уровня математической теории, в частности, распространив область ее применения на исследование отношения лиц, принимающих решения, к риску. В 1964—1965 гг. *К. Эрроу (K. J. Arrow)* и *Дж. Прайт (J. W. Pratt)* ввели функцию (коэффициент) абсолютной несклонности к риску. С 1980-х гг. применением теории полезности к задачам портфельного инвестирования в основные и производные финансовые инструменты активно занимается Нобелевский лауреат *Р. Мертон (R. C. Merton)*.

Таким образом, научная проблема в широком смысле является достаточно разработанной. Вместе с тем, ощущается необходимость в даль-

нейшем исследовании узкой области, определяемой темой данной работы.

**Методология и методика исследования.** Теоретической и методологической основой работы послужили исследования в области математической экономики, финансовой математики, теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов и теории оптимизации.

В ходе исследования были использованы труды *В. Е. Барбаумова*, *Ф. Блэка (F. Black)*, *Ф. П. Васильева*, *Дж. Кокса (J. C. Cox)*, *А. Н. Колмогорова*, *Дж. Линтнера (J. Lintner)*, *Т. МакУолтера (T. A. McWalter)*, *А. В. Мельникова*, *Р. Мертона (R. C. Merton)*, *О. Morgenштерна (O. Morgenstern)*, *Дж. фон Неймана (J. von Neumann)*, *Р. Росса (R. A. Ross)*, *М. Рубинштейна (M. Rubinstein)*, *В. Н. Тютубалина*, *Л. С. Понтрягина*, *Дж. Пратта (J. W. Pratt)*, *У. Шарпа (W. F. Sharpe)*, *А. Н. Ширяева*, *М. Шоулза (M. Scholes)*, *П. Эмбрехтса (P. Embrechts)*, *К. Эрроу (K. J. Arrow)* и других отечественных и зарубежных экономистов и математиков.

Для расчетов применялся пакет прикладных программ *Microsoft Excel*.

**Информационная база.** Информационную базу исследования составили статистические данные о торгах акциями и ПФИ в секторах «Биржевой рынок» и «Срочный рынок» ФБ «РТС», опубликованные в открытом доступе на официальном сайте ФБ «РТС» ([www.rts.ru](http://www.rts.ru)).

**Научная новизна.** Научная новизна исследования состоит в разработке моделей опционного хеджирования в дискретном и непрерывном времени с учетом отношения инвестора к риску.

**Положения, выносимые на защиту.** Автором получены и выносятся на защиту следующие новые научные результаты:

- анализ существующих подходов к опционному хеджированию;
- подход к опционному хеджированию, учитывающий отношение инвестора к риску (включая построение соответствующих математических моделей и их исследование);
- использование задач оптимального управления для решения задач ценообразования опционов;
- исследование особенностей российского рынка ПФИ;
- сравнение эффективности различных подходов к опционному хеджированию.

**Достоверность результатов исследования.** Достоверность полученных результатов обеспечивается построением экономически обоснованных математических моделей, строгостью применения математических методов при исследовании этих моделей. Основные положения сформулированы в виде теорем и доказаны. Также о достоверности теоретических результатов свидетельствует совпадение их частных случаев с известными результатами. Достоверность практических расчетов основана на использовании реальных данных, находящихся в открытом доступе на официальном сайте ФБ «РТС».

**Теоретическая и практическая значимость результатов исследования.** Разработанные модели опционного хеджирования в дискретном и

непрерывном времени с учетом отношения инвестора к риску, а также проведенная в работе модификация известных моделей ПФИ с учетом особенностей российского фондового рынка имеют теоретическое и практическое значение. В частности, результаты проведенных экспериментов показали, что опционное хеджирование, проведенное в соответствии с построенными моделями, учитывающими отношение инвестора к риску, на основании реальных данных о торгах ПФИ на российском фондовом рынке, оказалось эффективнее традиционного хеджирования (без учета отношения инвестора к риску).

Результаты работы могут быть использованы:

- индивидуальными и корпоративными инвесторами при принятии инвестиционных решений на фондовом рынке;
- фондовыми биржами при разработке новых ПФИ;
- органами государственного управления в качестве инструмента поддержки принятия решений по регулированию фондового рынка;
- учебными заведениями при обучении студентов, переподготовке и повышении квалификации специалистов — работников соответствующих государственных и коммерческих структур.

**Апробация результатов исследования.** Промежуточные результаты исследования докладывались и обсуждались на Межвузовской научно-практической конференции «Инновационное предпринимательство и управление знаниями» (г. Москва, 2006 г.), 22-й Всероссийской научной конференции молодых ученых и студентов «Реформы в России и проблемы управления — 2007» (г. Москва, 2007 г.), 2-й Международной конференции «Математическое моделирование социальной и экономической динамики MMSED — 2007» (г. Москва, 2007 г.).

**Внедрение результатов исследования.** Результаты работы используются в практической деятельности ОАО «Камский прессово-рамный завод» при принятии инвестиционных решений (акт о внедрении от 04.10.2007 г.), а также в учебном процессе ГОУ ВПО «ГУУ» при преподавании учебной дисциплины «Теория вероятностей, математическая статистика и теория игр» для студентов специальности 080116 «Математические методы в экономике» (акт о внедрении от 02.10.2007 г.).

**Публикации.** Основной материал работы опубликован в 5 печатных научных работах соискателя общим объемом 20 с., выполненных без соавторства (в том числе опубликована 1 монография и 1 статья в журнале «Вестник Университета», которых входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук).

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, выводов, списка использованной литературы и приложений. Основной текст работы составляет 113 страниц, в том числе 1 рисунок и 3 таблицы; список литературы содержит 140 наименований; 8 приложений включают 5

таблиц. Общая структура работы, predetermined предметом и задачами исследования, такова.

## **ВВЕДЕНИЕ**

### **ГЛАВА 1. Эволюция финансового рынка и финансовой теории**

- 1.1. Эволюция финансового рынка
- 1.2. Эволюция финансовой теории

*Резюме*

### **ГЛАВА 2. Решение задачи оптимального управления портфелем, содержащим ПФИ**

- 2.1. Предпосылки задачи. Дискретное время
- 2.2. Решение задачи хеджирования без учета отношения к риску.  
Дискретное время
- 2.3. Решение задачи хеджирования с учетом отношения к риску.  
Дискретное время
- 2.4. Предпосылки задачи. Непрерывное время
- 2.5. Решение задачи хеджирования без учета отношения к риску.  
Непрерывное время
- 2.6. Решение задачи хеджирования с учетом отношения к риску.  
Непрерывное время
- 2.7. Определение рациональной стоимости ПФИ на основе решения задачи об оптимальном управлении портфелем. Непрерывное время

*Резюме*

### **ГЛАВА 3. Реализация стратегии хеджирования с учетом отношения инвестора к риску**

- 3.1. Алгоритм реализации стратегий опционного хеджирования, учитывающих отношение инвестора к риску
- 3.2. Пример хеджирования фьючерсного опциона покупателя

*Резюме*

## **ВЫВОДЫ**

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

**ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Структура данных итогов торгов, публикуемых на официальном сайте РТС**

**ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Ставка рефинансирования Центрального банка Российской Федерации**

**ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Спецификация опциона на фьючерсный контракт на обыкновенные акции РАО «ЕЭС России»**

**ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Спецификация фьючерсного контракта на обыкновенные акции РАО «ЕЭС России»**

**ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Данные об итогах торгов обыкновенными акциями РАО «ЕЭС России» за период с 27.07.2005 г. по 27.07.2006 г., используемые для оценки параметров фьючерсного контракта ESZ6 как базового актива опционного контракта ES25000L6 в модели (3.1.5)**

**ПРИЛОЖЕНИЕ 6. Реализация различных стратегий опционного хеджирования на примере опциона ES25000L6 на фьючерс ESZ6**

**ПРИЛОЖЕНИЕ 7. Акт о внедрении результатов работы в практическую деятельность ОАО «Камский прессово-рамный завод»**

**ПРИЛОЖЕНИЕ 8. Акт о внедрении результатов работы в учебный процесс ГОУ ВПО «ГУУ»**

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обоснована актуальность темы, сформулирована цель и задачи исследования, определена его область, объект и предмет, проанализирована степень научной разработанности проблемы, обозначена методология и методика исследования, указана его информационная база. Далее сформулирована научная новизна исследования с указанием положений, выносимых на защиту, обоснована достоверность этих положений, их теоретическая и практическая значимость, приведены сведения об апробации и внедрении результатов работы, публикации ее основных результатов, а также о структуре и объеме работы. Далее кратко изложены основные результаты по главам.

**В первой главе** проведен анализ и систематизация существующих моделей ценных бумаг и ПФИ, выделены подходы, применяемые к моделированию ПФИ, в частности, для хеджирования рыночных рисков. Особое внимание уделено применению теории полезности к моделированию принятия инвестором решений по управлению портфелем. Традиционные стратегии опционного хеджирования основаны на идее повторения динамикой капитала портфеля динамики цены производного инструмента и не учитывают отношения инвестора к риску, поэтому учет влияния отношения инвестора к риску на стратегии хеджирования представляется важным и актуальным.

**Во второй главе** постановка задачи опционного хеджирования сводится к задаче оптимального управления самофинансируемым портфелем, составленным из ПФИ в короткой позиции и хеджирующего портфеля, на эффективном рынке. В качестве критерия оптимальности выступает математическое ожидание полезности конечного капитала сформированного портфеля. Отношение инвестора к риску (несклонность) учитывается с помощью формы функции полезности (ее вогнутости).

В дискретном времени рассматривается эффективный рынок, описываемый биномиальной моделью Кокса — Росса — Рубинштейна. В этой модели цена единицы банковского счета  $B_t$  в момент времени  $t$  определяется соотношением

$$B_t = B_{t-1}(1 + i) = B_0(1 + i)^t = B_0R^t, \quad t = 1, 2, \dots, T,$$

где  $i$  — постоянная ставка начисления сложных процентов на банковский счет,  $R = 1 + i$ ,  $B_0 = 1$ .

Цена акции  $S_t$  в момент времени  $t$  равна

$$S_t = S_{t-1}(1 + m_t) = S_0 \prod_{j=1}^t (1 + m_j), \quad t = 1, 2, \dots, T,$$



где  $(1 + \mu_t)$  — альтернативная случайная величина, заданная рядом распределения

$$\frac{1+\mu_t}{p} \left| \begin{array}{cc} u & d \\ p & q \end{array} \right., \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad 0 < d < 1 < 1 + i < u,$$

а

$$p = \frac{R - d}{u - d} —$$

риск-нейтральная вероятность.

Рациональная стоимость  $C_t$  европейского опциона покупателя с ценой исполнения  $K$  (ден. ед.), моментом исполнения  $T$  (периодов) и платежной функцией

$$f_T = \max\{S_T - K; 0\}$$

в момент времени  $t$  в модели Кокса — Росса — Рубинштейна определяется формулой

$$C_t = \frac{\sum_{k=0}^{T-t} \max\{S_t u^k d^{T-t-k} - K; 0\} C_{T-t}^k p^k q^{T-t-k}}{(1+i)^{T-t}}.$$

Из  $\beta_t$  единиц банковского счета,  $\gamma_t$  акций и одного опциона в короткой позиции формируется самофинансируемый портфель

$$\pi_t = (\beta_t, \gamma_t, -1).$$

Задача опционного хеджирования связана с необходимостью выбора из множества допустимых стратегий  $\Gamma_0$  такой стратегии  $\gamma_0^* \in \Gamma_0$  управления самофинансируемым портфелем  $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t, -1)$  на отрезке  $[0; T]$ , которая обеспечит максимальную ожидаемую полезность капитала  $x_T$  портфеля в момент исполнения опциона  $t = T$ , при условии, что в начальный момент времени  $t = 0$  капитал портфеля составляет  $x_0$  ден. ед., а цена акции равна  $S_0$  ден. ед.:

$$\max_{\gamma_0} \mathbf{E}(U(x_T) | S_0),$$

$$\gamma_0 \in \Gamma_0, \quad x_0 \in \square,$$

здесь капитал портфеля  $x_T$  в момент времени  $T$  определяется, с учетом условия самофинансируемости

$$B_{t-1}\Delta B_t + S_{t-1}\Delta \Gamma_t = 0, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (1)$$

формулой

$$x_T = (x_0 + C_0)R^T + \sum_{m=1}^T \Gamma_m R^{T-m} (S_m - S_{m-1}R) - f_T,$$

$U(x)$  — это функция полезности несклонного к риску инвестора ( $U' > 0, U'' < 0$ ),  $\gamma_0 = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_T)$  — стратегия управления портфелем на отрезке  $[0; T]$ .

Решение этой задачи, полученное в работе методом динамического программирования для частного случая функции полезности фон Неймана — Моргенштерна

$$U(x) = x - bx^2, \quad b > 0, \quad x \leq \frac{1}{2b},$$

приводит к следующему результату: чтобы максимизировать ожидаемое значение функции полезности капитала портфеля  $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t, -1)$  в момент исполнения опциона  $t = T$ , необходимо в каждый момент времени  $t = 0, 1, \dots, T$  до момента исполнения опциона включительно корректировать количество акций в портфеле  $\gamma_t$  в соответствии с формулой

$$\begin{aligned} \Gamma_\phi^* = & \frac{\sum_{k=0}^{T-\phi} C_{T-\phi}^k p^k q^{T-\phi-k} \left( (k_\phi - k_{\phi-1} - 1) f_T^{(2(k_\phi+k+1)-T)} - (k_\phi - k_{\phi-1}) f_T^{(2(k_\phi+k)-T)} \right)}{R^{T-\phi} S_{\phi-1} (u(k_\phi - k_{\phi-1}) - d(k_\phi - k_{\phi-1} - 1) - R)} + \quad (2) \\ & + \frac{1 - 2bE(x_T | S_{\phi-1})}{2bR^{T-\phi}(S_\phi - S_{\phi-1}R)}, \end{aligned}$$

а количество единиц банковского счета  $\beta_t$  — исходя из условия самофинансирования (1) — в соответствии с формулой

$$B_t^* = \frac{x_{t-1}}{R^{t-1}} - \frac{\Gamma_t S_{t-1}}{R^{t-1}} + \frac{C_{t-1}}{R^{t-1}}.$$

Здесь  $k_t$  — это количество периодов на отрезке  $[0, t]$ , в которых цена акции возростала в  $u$  раз [при этом в оставшихся  $(t - k_t)$  периодах цена возростала в  $d$  раз ( $0 < d < 1 < R < u$ )],

$$f_T^{(2l-T)} = \max \{ S_0 u^l d^{T-l} - K; 0 \}, \quad l = 0, 1, \dots, T.$$

В непрерывном времени динамика цены акции определяется стохастическим дифференциальным уравнением

$$dS_t = S_t(adt + ydW_t),$$

где  $S_t$  — цена акции в момент  $t$ ,  $a$  — мгновенная доходность цены акции,  $\sigma$  — волатильность цены акции,  $W_t$  — стандартное броуновское движение.

Проценты на банковский счет начисляются непрерывно с постоянной годовой процентной ставкой  $i$ , так что

$$dB_t = cB_t dt,$$

где  $B_t$  — сумма на счете в момент времени  $t$ ,  $c = \ln(1+i)$  — постоянная интенсивность начисления процентов.

Рациональная стоимость  $Y_t = Y(t, S_t)$  ПФИ в момент  $t$  определяется фундаментальным уравнением Блэка — Шоулза — Мертона

$$cY(t, S_t) = \frac{\partial Y(t, S_t)}{\partial t} + cS_t \frac{\partial Y(t, S_t)}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 Y(t, S_t)}{\partial S^2}$$

с соответствующим «конечным» условием  $Y(T, S_T) = f_T$ .

Задача оптимального опционного хеджирования сводится к задаче отыскания такой допустимой стратегии управления  $\Gamma_t \in \square$  на отрезке  $[0, T]$ , которая позволит максимизировать ожидаемую полезность капитала  $x_T$  с а - м о ф и н а н с и р у е м о г о п о р т ф е л я  $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t, -1)$  в момент времени  $T$  при условии, что в начальный момент времени  $t=0$  капитал портфеля составляет  $x_0$  ден. ед., а цена акции равна  $S_0$  ден. ед.:

$$\begin{aligned} & \max_{\Gamma} \mathbf{E}(U(x_T) | S_0), \\ & dx_t = \tilde{a}(t, x_t, \Gamma_t) dt + \tilde{y}(t, x_t, \Gamma_t) dW_t, \quad t \in [0, T], \\ & x(0) = x_0, \\ & \Gamma = \Gamma_t \in \square, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

где  $\tilde{a}(t, x_t, \Gamma_t)$  и  $\tilde{y}(t, x_t, \Gamma_t)$  определяются, с учетом условия самофинансированности

$$dx_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t - dY_t, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

формулами

$$\tilde{a}(t, x_t, \Gamma_t) = cx_t + (a - c)\Gamma_t S_t + cY(t, S_t) - R_a Y(t, S_t)$$

и

$$\tilde{y}(t, x_t, \Gamma_t) = \left( \Gamma_t - \frac{\partial Y(t, S_t)}{\partial S} \right) S_t \sigma$$

соответственно.

Решение этой задачи, полученное в работе методом динамического программирования (для произвольной функции полезности несклонного к риску инвестора), приводит к следующему результату: чтобы максимизировать ожидаемую полезность капитала портфеля  $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t, -1)$ , количество акций в портфеле  $\gamma_t$  необходимо динамически изменять на полуинтервале  $[0, T]$  в соответствии с формулой

$$\Gamma_t^* = \frac{\partial Y(t, S_t)}{\partial S} + \frac{a - c}{R_A S_t y^2}, \quad (4)$$

где

$$R_A(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}$$

функция абсолютной несклонности к риску Эрроу — Пратта.

При этом  $\beta_t$  определяется из условия самофинансируемости (3) по формуле

$$\beta_t = \frac{x_t + Y_t - \Gamma_t S_t}{B_t}.$$

Первое слагаемое в правой части соотношений (2) и (4) представляет собой объективную составляющую в управлении портфелем — она соответствует традиционной стратегии опционного дельта-хеджирования, которое состоит в таком управлении, что в каждый момент времени в непрерывном случае количество акций в портфеле  $\gamma_t$  равно

$$d(t, S_t) = \frac{\partial Y(t, S_t)}{\partial S}.$$

Второе слагаемое — субъективная составляющая — отвечает за учет отношения инвестора к риску.

Далее рассматриваются конкретные примеры функций полезности несклонного к риску инвестора:

- квадратичная функция полезности (функция полезности фон Неймана — Моргенштерна):  $U(x) = ax - bx^2$ , где  $a > 0$ ,  $b > 0$ ;
- экспоненциальная:  $U(x) = -e^{-zx}$ , где  $z > 0$ ;
- логарифмическая:  $U(x) = \ln x$ ;
- степенная:  $U(x) = \frac{x^k}{k}$ , где  $0 < k < 1$ .

Для этих функций полезности получены выражения оптимальных стратегий опционного хеджирования (табл. 1).

Оптимальные стратегии опционного хеджирования  
для различных функций полезности

Функция полезности $U(x)$	Абсолютный коэффициент несклонности к риску $R_A(x)$ и его производная	Оптимальное управление $\Gamma_t$
$U(x) = x - bx^2$ , где $b > 0$	$R_A = -\frac{-2b}{1-2bx} = \frac{2b}{1-2bx}$ $R'_A = \frac{4b^2}{(1-2bx)^2} > 0$	$\Gamma_t = \frac{\partial Y(t, S_t)}{\partial S} + \frac{(a-c)(1-2bx_t)}{2bS_t y^2}$
$U(x) = -e^{-zx}$ , где $z > 0$	$R_A = -\frac{-z^2 e^{-zx}}{z e^{-zx}} = z$ $R'_A = 0$	$\Gamma_t = \frac{\partial Y(t, S_t)}{\partial S} + \frac{(a-c)}{z S_t y^2}$
$U(x) = \ln x$	$R_A = -\frac{1/x^2}{1/x} = -\frac{1}{x}$ $R'_A = -\frac{1}{x^2} < 0$	$\Gamma_t = \frac{\partial Y(t, S_t)}{\partial S} + \frac{x_t(a-c)}{S_t y^2}$
$U(x) = \frac{x^k}{k}$ , где $0 < k < 1$	$R_A = -\frac{(k-1)x^{k-2}}{x^{k-1}} = \frac{1-k}{x}$ $R'_A = \frac{k-1}{x^2} < 0$	$\Gamma_t = \frac{\partial Y(t, S_t)}{\partial S} + \frac{x_t(a-c)}{(1-k)S_t y^2}$

Также во второй главе обсуждается возможность использования решения задачи оптимального управления самофинансируемым портфелем  $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t, -1)$  для определения рациональной стоимости ПФИ.

Доказано, что формула для определения рациональной стоимости европейского опциона покупателя, полученная с использованием такого подхода, совпадает с формулой Блэка — Шоулза.

**В третьей главе** проанализированы особенности российского рынка ПФИ. Торговля опционами в России представлена только на торговой площадке *FORTS* ФБ «РТС», где обращаются американские опционы на фьючерсы, базовыми активами которых являются акции российских компаний.

Поскольку американский опцион покупателя невыгодно исполнять до истечения срока его действия, он полностью эквивалентен аналогичному европейскому опциону, поэтому модели для американских и европейских опционов покупателя совпадают.

В работе проведен анализ особенностей опционов на фьючерсы, который привел к следующим результатам.

1. Динамика фьючерсной цены  $F_t$  базового для фьючерса актива в момент  $t$  определяется стохастическим дифференциальным уравнением

$$dF_t = F_t((a - c)dt + ydW_t).$$

2. Отсюда следует, что волатильность  $y_F$  фьючерса как актива, базового для опциона, совпадает с волатильностью  $\sigma$  актива, базового для фьючерса. Поэтому с точки зрения ценообразования в рамках модели Блэка — Шоулза — Мертона и, соответственно, дельта-хеджирования, опционы на фьючерсы не отличаются от опционов на акции. Таким образом, фьючерс на акцию можно рассматривать как рисковый актив, для которого мгновенная доходность равна разнице мгновенной доходности акции  $a$  и интенсивности начисления безрисковых процентов  $c$ , а волатильность цены совпадает с волатильностью цены акции  $\sigma$ , и для определения рациональной цены  $C_t$  фьючерсного опциона покупателя можно воспользоваться формулой

$$C_t = F_t\Phi(y_t^+) - K\Phi(y_t^-)e^{-c(T-t)},$$

где  $\Phi(z)$  — функция Лапласа,

$$y_t^\pm = \frac{1}{y\sqrt{(T-t)}} \left( \ln \frac{F_t}{K} + (T-t) \left( c \pm \frac{y^2}{2} \right) \right).$$

Стратегия дельта-хеджирования реализуется при этом так:

$$d(t, F_t) = \frac{\partial C_t}{\partial F} = \Phi(y_t^+).$$

3. Мгновенная доходность  $a_F$  фьючерса как актива, базового для опциона, равна разнице мгновенной доходности базового для фьючерса актива  $a$  и интенсивности начисления процентов по безрисковым вложениям  $r$ . Поэтому стратегия хеджирования фьючерсных опционов, учитывающая отношение инвестора к риску, определяется формулой

$$\Gamma_t = \frac{\partial C_t}{\partial F} + \frac{a_F - c}{R_A F_t y_F^2} = \Phi(y_t^+) + \frac{a - 2c}{R_A F_t y^2}.$$

На официальном сайте ФБ «РТС» ([www.rts.ru](http://www.rts.ru)) доступна информация об итогах торгов основными и производными финансовыми инструментами.

По информации о торгах опционом ES25000L6 на фьючерс ESZ6, базовый актив которого представляет собой 1000 обыкновенных акций РАО

«ЕЭС России», были проведены расчеты конечного капитала портфеля в нескольких вариантах:

- без хеджирования;
- с применением традиционного дельта-хеджирования;
- с применением хеджирования с учетом отношения инвестора к риску для различных функций полезности:  $U(x) = x - 0,0002x^2$ ,  $U(x) = -e^{-x}$ ,  $U(x) = \ln x$  и  $U(x) = x^{0,8}/0,8$ .

Результаты проведенных экспериментов представлены в табл. 2, 3. Они продемонстрировали большую эффективность хеджирования, учитывающего отношение инвестора к риску, по сравнению с традиционным хеджированием.

**Т а б л и ц а 2**

*Характеристики базового инструмента (в расчете на один торговый день)*

$\sigma$	$a$	$i$	$\rho$
0,0286	0,0031	0,0004	0,0004

**Т а б л и ц а 3**

*Результат реализации различных стратегий*

Стратегия хеджирования		Капитал портфеля инвестора в момент исполнения опциона, руб.
без хеджирования		-576,20
дельта-хеджирование		1498,88
хеджирование с учетом отношения инвестора к риску для различных функций полезности	$U(x) = x - 0,0002x^2$	2346,26
	$U(x) = -e^{-x}$	1499,67
	$U(x) = \ln x$	2380,95
	$U(x) = x^{0,8}/0,8$	3015,27

## ВЫВОДЫ

1. Традиционные стратегии опционного хеджирования основаны на идее повторения динамикой капитала портфеля динамики цены производного инструмента и не учитывают отношение инвестора к риску, поэтому учет влияния отношения инвестора к риску на стратегии хеджирования представляется важным.
2. Применение предложенного в работе подхода, состоящего в постановке задачи опционного хеджирования как задачи оптимального управления портфелем (с точки зрения максимизации ожидаемой полезности конечного капитала) и решении этой задачи методом динамического программирования дискретном и непрерывном времени приводит к выводу о том, что при оптимальном управлении количество единиц базового актива в самофинансируемом портфеле в каждый момент времени должно быть равно сумме объективной составляющей, которая соответствует традиционной стратегии хеджирования, и субъективной составляющей, учитывающей отношение инвестора к риску; в работе получены аналитические выражения для этих составляющих.
3. Задача оптимального управления самофинансируемым портфелем в постановке, предложенной в настоящей работе, может быть использована для решения задачи ценообразования опциона. Применение этого подхода позволяет сделать вывод о том, что рациональная стоимость опциона, определяемая формулой Блэка — Шоулза, соответствует оптимальному управлению портфелем, содержащим опцион.
4. Исследование особенностей российского рынка показало, что при исследовании опционов на фьючерсы, которые обращаются на торговой площадке *FORTS* ФБ «РТС», правомерно считать, что фьючерс на акцию представляет собой рисковый актив с мгновенной доходностью, равной разности мгновенной доходности базовой акции и интенсивности безрисковых процентов, и волатильностью, совпадающей с волатильностью базовой акции, поэтому с точки зрения ценообразования и управления портфелем опционы на фьючерсы отличаются от опционов на акции только конкретными значениями параметров модели.
5. Эксперименты, проведенные на основании реальных данных о торгах фьючерсными опционами на ФБ «РТС», показали, что на реальном рынке опционное хеджирование, учитывающее отношение инвестора к риску, более эффективно, чем традиционное хеджирование.



## СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Самоявчева М. В.* Отношение инвестора к риску при опционном хеджировании: Монография. — М.: Вега-Инфо, 2007. — 112 с.
2. *Самоявчева М. В.* Хеджирование опциона европейского типа в дискретном времени с учетом отношения хеджера к риску // Вестник Университета: Социология и управление персоналом. — 2007. — № 7 (33). — С. 327—329.
3. *Самоявчева М. В.* Оптимальное управление портфелем, содержащим деривативы // Математическое моделирование социальной и экономической динамики: Труды 2-й Международной конференции MMSED—2007: Дополнительный выпуск. — М.: РУДН, 2007. — С. 25—27.
4. *Самоявчева М. В.* Решение задачи оптимального управления портфелем финансовых инструментов методом динамического программирования // Реформы в России и проблемы управления—2007: Материалы 22-й Всероссийской научной конференции молодых ученых и студентов. — Вып. 2. — М.: ГОУ ВПО «ГУУ», 2007. — С. 231—232.
5. *Самоявчева М. В.* Подход динамического программирования к решению задачи оптимального управления портфелем финансовых инструментов // Инновационное предпринимательство и управление знаниями: Тезисы докладов межвузовской научно-практической конференции. — М.: РИПО ИГУМО, 2006. — С. 78—81.
6. *Самоявчева М. В.* Решение задачи оптимального управления портфелем финансовых инструментов методом динамического программирования // Проблемы развития рыночной экономики: Сборник научных трудов. — М.: ИПР РАН, 2006. — С. 75—82.