В. И. Соловьев (Москва, ГУУ). **Обобщенный принцип максимума как необходимое условие оптимальности в распределенной задаче оптимального управления с ограничениями в частных производных.**

Рассматривается следующая *распределенная задача оптимального управления.* Пусть t и x — координаты (для определенности будем считать, что t имеет смысл временной координаты, а x — пространственной), некоторый процесс $y = y(t,x) = y(t,x;u)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial y}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(t,x,y,u), \qquad t_0 < t < t_1, \quad x_0 < x < x_1, \quad \{u(t,x)\} \in \Omega; \tag{1}$$

$$y(t_0,x) = y_0(x,u), \qquad x_0 < x < x_1, \quad \{u(t,x)\} \in \Omega; \tag{2}$$

$$y(t,x_0) = \varphi_0(t,u), \qquad t_0 < t < t_1, \quad \{u(t,x)\} \in \Omega; \tag{3}$$

$$y(t,x_1) = \varphi_1(t,u), \qquad t_0 < t < t_1, \quad \{u(t,x)\} \in \Omega. \tag{4}$$

Пусть функция $u = u(t,x)$ из некоторого множества кусочно-непрерывных функций Ω задает *управление* процессом y, требуется найти *оптимальное управление* $u = u(t,x)$, т. е. такое управление, которое доставляет максимум функционалу $J = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} I(t,x,y,u)\,dx\,dt$ при условии, что процесс у подчиняется *уравнению движения* (1) *с начальным условием* (2) *и граничными условиями* (3)–(4).

Рассмотрим вначале частный случай, когда на управление не накладываются никакие ограничения. Введем *дифференциальный оператор* $D\cdot = \frac{\partial\cdot}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2\cdot}{\partial x^2}$, тогда рассматриваемую задачу можно записать в виде

$$\max_{\{u(t,x)\}} J \tag{5}$$

при ограничениях

$$f(t,x,y,u) - Dy = 0, \qquad t_0 < t < t_1, \quad x_0 < x < x_1; \tag{6}$$

$$y(t_0,x) = y_0(x,u), \qquad x_0 < x < x_1; \tag{7}$$

$$y(t,x_0) = \varphi_0(t,u), \qquad t_0 < t < t_1; \tag{8}$$

$$y(t,x_1) = \varphi_1(t,u), \qquad t_0 < t < t_1. \tag{9}$$

Введем *сопряженную переменную* $p = p(t,x)$, соответствующую ограничению (6), и запишем *обобщенную функцию Лагранжа* $L(\{u(t,x\},\{p(t,x\}) = J + \langle p, f(t,x,y,u) - Dy\rangle$, в которой скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ определяется как двойной интеграл по переменным t и x, при этом

$$L(\{u(t,x\},\{p(t,x\}) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} (I(t,x,y,u) + p(t,x)(f(t,x,y,u) - Dy))\,dx\,dt. \tag{10}$$

Седловой точкой обобщенной функции Лагранжа назовем такую точку $(\{u^*(t,x)\},\{p^*(t,x)\})$ пространства функций, что $L(\{u(t,x)\},\{p^*(t,x\}) \leqslant L(\{u^*(t,x\},\{p^*(t,x)\} \leqslant L(\{u^*(t,x\},\{p(t,x\})$ для всех $\{u(t,x)\},\{p(t,x)\}$.

Как и в статических задачах оптимизации, седловая точка определяет оптимальное решение задачи.

Теорема 1. *Седловая точка обобщенной функции Лагранжа* (10) *определяет решение распределенной задачи оптимального управления* (5)–(9).

Ниже определяются необходимые условия для существования такой седловой точки.

Теорема 2. *Седловая точка обобщенной функции Лагранжа* (10) *удовлетворяет следующим необходимым условиям:*

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \qquad t_0 < t < t_1, \quad x_0 < x < x_1; \tag{11}$$

$$Dy = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad D^* p = -\frac{\partial H}{\partial y}, \qquad t_0 < t < t_1, \quad x_0 < x < x_1;$$

$$p(t,x) = 0, \qquad x_0 < x < x_1; \quad \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=x_1} = 0, \qquad t_0 < t < t_1;$$

где $H(t,x,y,u,p) = I(t,x,y,u) + p(t,x)f(t,x,y,u)$ *есть гамильтониан,* $D^* \cdot = \frac{\partial \cdot}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2}$ *есть дифференциальный оператор, сопряженный к оператору* D.

В общем случае, когда на управление u наложено ограничение $\{u(t,x)\} \in \Omega$, условие (11) заменяется на $\max_{\{u(t,x)\} \in \Omega} H(t,x,y,u,p)$, $t_0 < t < t_1$, $x_0 < x < x_1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983, 392 с.
2. *Дубовицкий А. Я., Милютин А. А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений. — Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 3, с. 395–453.
3. *Розоноэр Л. И.* Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем, чч. I, II, III. — Автоматика и телемеханика, 1959, т. 20, № 10, с. 1320–1334; № 11, с. 1441–1458; № 12, с. 1561–1578.
4. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002, 824 с.
5. *Гирсанов И. В.* Лекции по математической теории экстремальных задач. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003, 120 с.