OPTIMAL CONTROL OF DISTRIBUTED SYSTEMS AND ITS APPLICATIONS IN ECONOMICS

V.I. Soloviev

visoloviev@narod.ru

State University of Management

Many economical systems are distributed, the most simple example of distributed economical system is illustrated by Beckman's transportation flow model $kf / |f| = \text{grad } l$, where l is good's price, k is transportation tariff and f is local transportation flow. We can also illustrate distributed economic systems by Black — Sholes's derivative instrument pricing model in financial theory, generalized Tiele's model in insurance theory, etc. The necessary conditions for optimal control of such systems satisfying partial differential equations are formulated as Lagrange — Pontryagin's maximum principle generalization. The economical and financial applications are discussed.

Многое экономические системы являются распределенными, простейший пример распределенной экономической системы иллюстрируется моделью транспортных потоков Бекмана:

$$\frac{kf}{|f|} = \text{grad } l,$$

где $l(x, y)$ — цена товара, зависящая от географических координат места торговли, k — транспортный тариф, а вектор f указывает направление транспортного потока, по которому движется данный товар.

Другими примерами распределенных экономических моделей являются модель Блэка — Шоулза ценообразования производных финансовых инструментов, модель Тиля в страховой теории и др.

Динамика таких экономических систем описывается уравнениями в частных производных.

В докладе обсуждается обобщение принципа максимума Лагранжа — Понтрягина для оптимального управления такими распределенными экономическими системами.

Рассмотрим следующую *задачу оптимального управления распределенной системой*:

$$\max_{\{u(t,x)\}} \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} I(t,x,y,u)dxdt;$$

$$Dy = f(t,x,y,u);\ \ t_0 < t < t_1;\ \ x_0 < x < x_1;$$

$$y(t_0,x) = y_0(x,u);\ \ x_0 < x < x_1;$$

$$y(t,x_0) = \varphi_0(t,u);\ \ t_0 < t < t_1;\ \ y(t,x_1) = \varphi_1(t,u);\ \ t_0 < t < t_1.$$

Здесь D — *дифференциальный оператор* уравнения движения, например, $D\cdot = \dfrac{\partial\,\cdot}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2\,\cdot}{\partial x^2}$ для уравнения теплопроводности, $D\cdot = \dfrac{\partial^2\,\cdot}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2\,\cdot}{\partial x^2}$ для волнового уравнения, $D\cdot = \dfrac{\partial^2\,\cdot}{\partial t^2} + a^2\dfrac{\partial^2\,\cdot}{\partial x^2}$ для уравнения Лапласа.

Введем *сопряженную переменную* $p = p(t, x)$, соответствующую ограничению (6), и запишем *обобщенную функцию Лагранжа*

$$L(\{u(t,x)\},\{p(t,x)\}) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \left[I(t,x,y,u) + p(t,x)(f(t,x,y,u) - Dy)\right]dxdt.$$

Седловой точкой обобщенной функции Лагранжа называется такая точка ($\{u^*(t, x)\}$, $\{p^*(t, x)\}$) пространства функций, что

$$L(\{u(t,x)\},\{p^*(t,x)\}) \leq L(\{u^*(t,x)\},\{p^*(t,x)\}) \leq L(\{u^*(t,x)\},\{p(t,x)\})$$

для всех $\{u(t, x)\}$, $\{p(t, x)\}$.

Теорема 1. Седловая точка обобщенной функции Лагранжа определяет решение распределенной задачи оптимального управления.

Функция $H(t,x,y,u,p) = I(t,x,y,u) + p(t,x) f(t,x,y,u)$ называется *гамильтонианом* распределенной задачи оптимального управления.

Теорема 1. Седловая точка обобщенной функции Лагранжа (10) удовлетворяет следующим необходимым условиям:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0;\ t_0 < t < t_1;\ x_0 < x < x_1; \tag{1}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = Dy;\ t_0 < t < t_1;\ x_0 < x < x_1;$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -D^* p;\ t_0 < t < t_1;\ x_0 < x < x_1;$$

$$p(t_0, x) = p(t_1, x);\ x_0 < x < x_1;\quad p(t, x_0) = p(t, x_1);\ t_0 < t < t_1;$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{t=t_1};\ x_0 < x < x_1;\quad \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=x_1};\ t_0 < t < t_1.$$

где D* — это дифференциальный оператор, сопряженный оператору $D\cdot$, например, для трех дифференциальных операторов, рассмотренных в начале доклада и соответствующих трем типам уравнений в частных производных второго порядка сопряженными будут соответственно

$$D^*\cdot = -\frac{\partial^2\cdot}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2\cdot}{\partial x^2},\ D^*\cdot = -\frac{\partial^2\cdot}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial^2\cdot}{\partial x^2},\ D^*\cdot = -\frac{\partial^2\cdot}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2\cdot}{\partial x^2}.$$